И. И. ГОНЧАР, Л. А. ЛИТНЕВСКИЙ

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ В ЗАДАЧАХ

(препринт)

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая физика – один из самых интересных разделов *современной физики*. Она сформировалась в первой трети двадцатого века в работах М. Планка, Н. Бора, В. Гейзенберга, П. Дирака, В. Паули, Э. Шрёдингера и многих других. *Квантовая физика* и разработанная несколькими годами раньше *теория относительности* А. Эйнштейна в корне изменили наши представления об основах мироздания, о пространстве и времени, представления, лежавшие в основе всей *классической физики* вплоть до конца 19-го века.

Квантовая физика является самой современной частью общего курса физики. Знакомство с этим разделом курса значительно расширяет наши знания о природе, а в чем-то и заставляет переосмыслить наши представления об окружающем нас мире.

Сам термин «Квантовая физика» (или «Квантовая механика» как основа и начальная часть квантовой физики) требует пояснения. В литературе используется также название «Волновая механика», что приводит в замешательство тех, кто начинает изучать этот раздел и знаком со школы с противостоянием научных школ Ньютона и Френеля. Чтобы избежать непонимания, приведем более полное название этого раздела физики – «Волновая механика квантов», из которого видно, что *квантовая физика изучает законы, описывающие поведение частиц (корпускул, квантов), используя для этого подходы, справедливые для описания волн, сопоставляя движению частиц математические объекты, аналогичные волнам*.

Квантовая физика является не только одним из самых красивых и интересных разделов физики, но и наиболее трудным для изучения и понимания. Трудность понимания законов квантовой физики связана с тем, что человечество не обладает повседневным опытом применения этих законов. Законы квантовой физики проявляются лишь в микромире, определяют поведение микрочастиц (атомов и их составных частей), безусловно, оказывают влияние на макромир, но не имеют в макромире аналогов.

Как и в изученных ранее разделах физики, а, быть может, и в гораздо большей степени, для успешного изучения вопросов этого наиболее современного раздела физики решение задач является совершенно необходимым. Решение задач не есть самоцель, а есть средство постижения закономерностей квантовой физики.

1. КВАНТОВО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

1.1. Гипотеза Планка. Фотоны

Методические рекомендации. К середине XIX века были хорошо изучены оптические (волновые) свойства излучения: интерференция, дифракция и т. д. (Эти вопросы были только что рассмотрены в разделе «Оптика» курса общей физики.) Однако к концу XIX века были обнаружены явления, явно противоречащие волновым представлениям о природе излучения. Чтобы разрешить противоречия, Макс Планк в 1900 году высказал гипотезу о том, что *излучение поглощается и испускается (а позже было признано, что и распространяется) порциями (квантами, корпускулами), то есть особыми частицами (эти частицы позже были названы фотонами), энергия, масса и импульс которых определяются выражениями*

$$W_{ф} = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = mc^2, \quad p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.1}$$

и неразрывно связаны с их волновыми характеристиками. Таким образом, оказалось, что *излучение – это поток частиц (корпускул, квантов) – фотонов, которые при этом обладают волновыми свойствами!*

Свойства фотонов как частиц достаточно необычны. Так, они движутся только со скоростью света, не имеют массы покоя (имеют релятивистскую массу), обладают энергией, импульсом, спином, но вместе с тем могут интерферировать, могут поглощаться частицами вещества, при этом исчезая, а их энергия, импульс, момент импульса переходят к поглотившим их частицам.

Несмотря на необычность ряда свойств фотонов, эти частицы, безусловно, подчиняются фундаментальным законам природы: законам сохранения энергии, импульса, момента импульса, распределению Гиббса.

Квантовые (корпускулярные, дискретные) свойства электромагнитного излучения проявляются в явлении фотоэффекта, эффекте Комптона, в опытах Боте по регистрации фотонов по схеме совпадений, в коротковолновом обрывании тормозных рентгеновских спектров и во множестве других явлений.

Исторически сложилось так, что раньше обратили внимание на волновые свойства этих частиц. Однако в этом разделе мы рассмотрим те явления, где проявляются корпускулярные свойства излучения и объяснение которых возможно только в рамках квантовых представлений о природе излучения.

Гипотеза Планка и понимание природы излучения было первым шагом к возникновению целого раздела знаний: квантовой физики.

Вопросы для самопроверки:

- Сформулируйте гипотезу Планка
- Перечислите основные свойства фотонов.
- Запишите формулы для основных характеристик фотонов. Почему именно эти характеристики следует считать основными?

Задача 1. (1) Пешеход, стоя на перекрестке, увидел, что красный (690 нм) свет светофора сменился на зеленый (510 нм). Фотоны какой энергии несут информацию 1) о запрещении перехода; 2) о разрешении перейти улицу? (Ответ дайте в электрон-вольтах.)

Задача 2. (1) Экран кинозала освещается ярким синим светом (440 нм). Чему равен импульс, который передает экрану каждый 1) поглощенный фотон; 2) отраженный фотон?

Задача 3. (1) Цветомузыкальная установка на дискотеке «залила» зал чистым желтым светом (560 нм). Фотоны какой массы заполнили при этом зал?

Задача 4. (1) В кабинете флюорографии исследование проводится мягкими рентгеновскими лучами, фотоны которых имеют энергию $6{,}62 \cdot 10^{-18}$ Дж. Можно ли в этих лучах получить четкое (не «размытое» дифракцией) изображение болезнетворных бактерий размером 1,2 мкм?

Задача 5. (1) При работе ядерного реактора излучаются гамма-кванты, имеющие энергию 150 МэВ. Чему равна частота соответствующего излучения?

Задача 6. (2) Гелий-неоновый лазер излучает красный свет, длина волны которого 0,64 мкм, а мощность излучения 55 мВт. Сколько фотонов излучает этот лазер каждую секунду.

Задача 7. (2) Передатчик радиостанции «Европа Плюс» работает на частоте 101,9 МГц. Мощность его излучения 750 Вт. Какую массу уносят фотоны этого излучения за сутки работы передатчика?

Задача 8. (2) Мощность сигнала на входе сотового телефона стандарта GSM-900 (работает на частоте 920 МГц) должна быть не менее 3,5 мкВт. Сколько фотонов должно каждую секунду поглощаться антенной телефона?

Задача 9. (2) Альфа-частица при торможении может испустить максимум четыре фотона с длиной волны 200 нм. Какова скорость α-частицы?

Задача 10. (2) Электрон, скорость которого составляла 10% от скорости света, резко остановился и испустил три одинаковых фотона. Определить их длины волн.

1.2. Фотоэффект

Методические рекомендации. Явление внешнего фотоэффекта заключается в вырывании электронов с поверхности металла фотонами излучения (света). Как правило, один фотон выбивает один электрон. Закон сохранения энергии, записанный для электрона, поглотившего фотон, получил название *уравнения Эйнштейна для фотоэффекта*:

$$W_{ф} = A_{вых} + W_{k\,\max} \tag{1.2}$$

Фотоэффект не наблюдается, если энергия фотона меньше работы выхода. Предельное, граничное значение энергии фотона (частоты, длины волны соответствующего излучения) называется *красной границей фотоэффекта* и, очевидно, определяется условием

$$W_{ф\,\text{гр}} = A_{вых} \tag{1.3}$$

Как правило, красная граница фотоэффекта находится в ультрафиолетовом (в крайнем случае, фиолетовом) диапазоне длин волн.

При включении фотоэлемента в электрическую цепь электрический ток (фототок) прекратится, если подать напряжение, препятствующее движению электронов от катода к аноду (так называемое *запирающее напряжение*). Это напряжение определяется условием

$$W_{k\,\max} = eU_{зап} \tag{1.4}$$

и является, очевидно, законом сохранения механической энергии, записанным для движения электрона в электростатическом потенциальном поле. Измерение запирающего напряжения при исследовании фотоэффекта – надежный способ измерения кинетической энергии выбитых из металла электронов.

Для решения задач на фотоэффект необходимо знать работы выхода электронов из металлов. Они представлены в приложении 3.

Вопросы для самопроверки:

- Как конкретно проявляются квантовые свойства света в явлении фотоэффекта?
- Можно ли объяснить вольтамперную характеристику электровакуумного фотоэлемента, не привлекая квантовых соображений? Если они необходимы, то для чего конкретно?
- От чего должна зависеть скорость фотоэлектронов, если предположить, что свет это электромагнитная волна?
- Запишите уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Является ли это уравнение самостоятельным законом или представляет собой частный случай какого-либо более общего закона?
- Как применяется фотоэффект в технике?

Задача 11. (1) Определить красную границу фотоэффекта для серебра.

Задача 12. (1) Чему равна работа выхода электронов из неизвестного металла, если фототок прекращается при увеличении длины волны падающего излучения до 0,32 мкм?

Задача 13. (1) С какой наибольшей скоростью электроны покидают фотокатод, если электрический ток через фотоэлемент прекращается при напряжении 1,4 В?

Задача 14. (1) Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых из вольфрама излучением с длиной волны 180 нм.

Задача 15. (2) Чему равна наименьшая длина волны в спектре падающего на литиевый фотоэлемент излучения, если запирающее напряжение оказалось равным 0,83 В?

Задача 16. (2) Найти задерживающую разность потенциалов для калия, если его поверхность освещается светом с частотой 800 ТГц.

Задача 17. (2) Длина волны излучения, вызывающего фототок в установке по исследованию фотоэффекта, 250 нм. Фототок прекращается при минимальной задерживающей разности потенциалов 0,96 В. Найти работу выхода.

Задача 18. (2) На поверхность платины падают лучи длиной волны 50 нм. Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение кинетической энергии фотоэлектрону?

Задача 19. (2) Иногда наблюдается многофотонный фотоэффект, который состоит в вырывании электронов при одновременном поглощении нескольких фотонов. Определите красную границу трехфотонного фотоэффекта для цезия.

Задача 20. (3) Какой максимальный заряд можно получить на алюминиевой пылинке (шарике) радиусом 12 мкм при освещении ее фотонами, соответствующими красной границе фотоэффекта в платине?

1.3. Эффект Комптона

Методические рекомендации. Эффект Комптона заключается в появлении в рассеянном излучении волн большей длины по сравнению с падающим излучением и связан с рассеиванием фотонов на свободных электронах. Объяснить эффект Комптона с волновой точки зрения невозможно.

Для элементарного акта рассеяния фотона на свободном электроне выполняются законы сохранения энергии и импульса

$$W_{ф} = W'_{ф} + W_{k\,e}; \quad \vec{p}_{ф} = \vec{p}'_{ф} + \vec{p}_e \tag{1.5}$$

Решая систему этих двух (трех) уравнений (второе уравнение векторное!), можно получить, что изменение длины волны рассеянного излучения по сравнению с падающим излучением зависит только от угла φ, под которым рассеивается фотон. Обычно записывают выражение не для «новой» длины волны, а для разности между длинами волн дополнительного и основного излучения

$$\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\varphi\right). \tag{1.6}$$

Множитель, состоящий из фундаментальных постоянных

$$\lambda_{К} = \frac{h}{m_e c} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ м}, \tag{1.7}$$

называется *комптоновской длиной волны электрона*.

Изменение длины волны в абсолютных числах столь мало, что эффект Комптона заметен лишь для коротковолнового (жесткого) рентгеновского излучения. Тем не менее он является неопровержимым доказательством квантовых (корпускулярных) свойств излучения.

При решении задач из этого раздела необходимо иметь в виду, что в результате рассеяния фотона электрон может получить релятивистскую скорость.

Связь между кинетической энергией релятивистской частицы и ее импульсом известна из механики и для электрона имеет вид

$$W_k = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - m_e c^2 . \qquad (1.8)$$

Напомним, что частицу следует считать релятивистской, если ее кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы.

Вопросы для самопроверки:

- Какую из закономерностей эффекта Комптона невозможно объяснить, оставаясь в рамках волновых представлений?
- Выведите формулу (1.6) из законов сохранения (1.5).
- В чем заключается практическое значение эффекта Комптона?

Задача 21. (1) На сколько изменится длина волны мягкого (λ > 0,2 нм) рентгеновского излучения, рассеянного под углом 60°, по сравнению с излучением, падающим на мишень?

Задача 22. (1) Рентгеновское излучение длиной волны 87,3 пм нормально падает на металлическую мишень. Волны какой длины будут регистрироваться в отраженном излучении?

Задача 23. (2) В результате столкновения со свободным электроном рентгеновский фотон был рассеян на угол 120º. При этом длина волны его стала равна 5, 45 пм. Определить энергию фотона до рассеяния.

Задача 24. (2) Какую энергию получит свободный электрон, рассеявший фотон рентгеновского излучения длиной волны 25,1 пм на угол 120°?

Задача 25. (2) Фотон с энергией 102 кэВ при взаимодействии со свободным электроном был рассеян на угол 90°. Найти импульс рассеянного фотона.

Задача 26. (2) Фотон излучения, длина волны которого равна комптоновской, был рассеян на свободном электроне так, что длина волны рассеянного излучения оказалась в 1,293 раза больше, чем падающего. Под каким углом был рассеян фотон?

Задача 27. (3) Фотон длиной волны 5,22 пм рассеивается на угол 60º на свободном электроне. Определить энергию фотона (в электрон-вольтах) после рассеяния и импульс, полученный электроном.

Задача 28. (3) Фотон рассеивается на свободном электроне. Длина волны фотона до рассеяния 4,13 пм. Кинетическая энергия электрона отдачи 0,144 МэВ. Найти угол, под которым рассеивается фотон.

Задача 29. (3) Фотон длиной волны 3,25 пм рассеивается на свободном электроне на угол 90º. Определить импульс электрона отдачи.

Задача 30. (3) Под каким углом к направлению падающего луча станет двигаться электрон после рассеяния фотона, если длина волны падающего излучения 3,58 пм, а рассеянного 7,52 пм.

1.4. Тепловое излучение

Методические рекомендации. *Любое нагретое тело излучает электромагнитные волны!* Излучение сильно нагретых тел обнаруживается непосредственно органами чувств человека (излучение Солнца, лампы накаливания, костра, нагретого металла). Излучение менее нагретых тел, хотя и не видно, тем не менее существует и обнаруживается приборами (например, микроволновыми датчиками автомобильных охранных систем или автоматически открывающихся дверей, реагирующими на излучение тела приближающегося человека). Тепловое излучение тел не следует путать с отраженным или рассеянным телами излучением, которое упало на эти тела от других источников излучения.

Свойства теплового излучения (интенсивность, диапазон длин волн, распределение интенсивности излучения по длинам волн) определяются характеристиками поверхности тела и его температурой. Наиболее простая модель нагретых тел – модель *абсолютно черного тела* (АЧТ). Свойства излучения АЧТ определяются только его температурой.

Излучение АЧТ принято характеризовать либо *испускательной способностью* $r_T(\omega)$ (ее также называют *спектральной плотностью энергетической светимости*), либо *спектральной плотностью излучения* $u_T(\omega)$. Связь между ними для АЧТ определяется простой формулой

$$r_T(\omega) = \frac{c}{4} u_T(\omega) \tag{1.9}$$

Эти две характеристики отражают два подхода к описанию свойств теплового излучения и частично дублируют друг друга, поэтому здесь мы рассмотрим лишь первую из них.

Энергетической светимостью

$$R_T = \frac{P}{S} = \frac{W}{S \cdot t} \quad \left(\left[R \right] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right) \tag{1.10}$$

называется энергия, испускаемый в единицу времени единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям в пределах телесного угла 2π, то есть в пределах полупространства.

Испускательной способностью

$$r_T\left(\omega\right) = \frac{dR_T}{d\omega} \tag{1.11}$$

называется энергетическая светимость нагретого тела в узком интервале частот $d\omega$, принадлежащим диапазону ($\omega;\ \omega+d\omega$). Смысл спектральной плотности энергетической светимости $r_T\ (\omega)$ можно сформулировать также следующим образом: произведение $r_T\ (\omega)d\omega$ представляет собой энергию, излучаемую с единицы поверхности в единицу времени в интервале частот $d\omega$ вблизи частоты ω.

Очевидно, что интегрирование спектральной плотности энергетической светимости (испускательной способности) по всему диапазона частот излучения дает энергетическую светимость

$$R_T = \int_0^\infty r_T\left(\omega\right) d\omega. \tag{1.12}$$

Поглощательной способностью (коэффициентом поглощения) a_T называется безразмерная физическая величина, показывающая, какая часть падающего на тело излучения из узкого интервала частот $d\omega$, принадлежащих диапазону ($\omega;\ \omega+d\omega$), будет поглощена телом.

Для излучения тел справедлив так называемый закон Кирхгофа*: отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тел и является универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры – функцией Кирхгофа*

$$\frac{r_T\left(\omega\right)}{a_T\left(\omega\right)} = f_T\left(\omega\right) \tag{1.13}$$

Поскольку АЧТ поглощает все падающее на него излучение, то, очевидно, для АЧТ

$$a_T = 1; \quad r_T(\omega) = f_T(\omega), \tag{1.14}$$

то есть испускательная способность АЧТ совпадает с универсальной функцией Кирхгофа.

Испускательная способность тел, свойства которых очень близки к свойствам АЧТ (а, значит, и универсальная функция Кирхгофа) измеряется экспериментально.

Из анализа экспериментальных данных (эмпирически) были получены закон Стефана–Больцмана

$$R_T = \sigma T^4 \tag{1.15}$$

и закон смещения Вина

$$\lambda_{(\max)} T = b, \tag{1.16}$$

где $\sigma = 5{,}67032 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$, $b = 0{,}0029\ \text{м} \cdot \text{К}$.

Многочисленные попытки в конце XIX века теоретически получить универсальную функцию Кирхгофа не просто заканчивались неудачей, но и приводили к непреодолимым противоречиям. (В историю физики эти противоречия вошли под названием *ультрафиолетовая катастрофа*.)

Для низких частот с экспериментальным графиком совпадала формула Релея–Джинса

$$f_T^{\text{РД}}(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{4\pi^2 c^2}, \tag{1.17}$$

которая, однако, совершенно противоречила эксперименту в области высоких частот.

Позже была получена формула Вина

$$f_T^{\text{В}}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2}\, e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}, \tag{1.18}$$

хорошо описывающая эксперимент для высоких частот и противоречащая ему в низкочастотной области спектра.

Лишь после того, как Макс Планк сформулировал знаменитую гипотезу (носящую его имя) о дискретном характере излучения энергии нагретыми телами, им была получена так называемая *формула Планка*, идеально соответствующая экспериментальному графику универсальной функции Кирхгофа

$$f_T(\omega)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)^{-1} \tag{1.19}$$

Вопросы для самопроверки:

- Универсальная функция Кирхгофа в формуле (1.19) является функцией циклической частоты. Преобразуйте ее так, чтобы она стала функцией длины волны излучения.
- Используя универсальную функцию Кирхгофа как функцию длины волны излучения, получите закон смещения Вина - длину волны, на которой интенсивность излучения максимальна.
- Получите из формулы Планка формулу Рэлея-Джинса.
- Получите из формулы Планка формулу Вина.

Задача 31. (1) К вечеру жаркого солнечного дня закопченная стена старинного лондонского здания прогрелась до 30 градусов по Цельсию. Сколько энергии за одну секунду излучает каждый квадратный метр этой стены вскоре после захода Солнца.

Задача 32. (1) В условии предыдущей задачи найти длину волны, на которую приходился максимум испускательной способности.

Задача 33. (1) Вычислить температуру поверхности Сириуса, если за сутки 3500 квадратных километров его поверхности излучают $14{,}1\cdot10^{22}$ Дж энергии.

Задача 34. (1) Вычислить длину волны, соответствующую максимуму в спектре излучения электрической лампочки, температура нити которой 3000 К.

Задача 35. (2) Мощность, излучаемая абсолютно черным телом, составляет 10 кВт, максимум излучения приходится на длину волны 0,80 мкм. Определить площадь излучающей поверхности.

Задача 36. (2) Температура абсолютно черного тела составляет 900 К. Определить, как и на сколько она изменится, если длина волны, отвечающая пику спектра излучения, увеличится на 0,40 мкм.

Задача 37. (2) Из смотрового окна закалочной печи, имеющего диаметр 6,0 см, ежесекундно излучается 81 Дж энергии. Энергетическая светимость этого окна в четыре раза меньше, чем абсолютно черного тела, имеющего такую же температуру. Какова температура печи?

Задача 38. (2) Электрическая лампа мощностью 100 Вт имеет вольфрамовую нить длиной 19 см и диаметром 100 мкм. Эта нить нагревается до 3000 К. Во сколько раз отличается испускательная способность нити от испускательной способности абсолютно черного тела?

Задача 39. (3) Сколько энергии излучает нагретая до 1200°С металлическая пластинка размером 25 см^2 за 34 с в диапазоне частот от нуля до 52 ТГц, если ее излучение в этом диапазоне близко к излучению абсолютно черного тела.

Задача 40. (4) Сколько энергии за 5,7 с излучает 3,6 см^2 поверхности тела, нагретого до температуры 800 К, в интервале частот от 75 до 100 ТГц, если в этом диапазоне частот поглощательная способность этого тела определяется выражением $a_T(\omega) = \exp\left(\hbar\omega/(kT)\right)$.

2. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

2.1. Гипотеза де Бройля

Методические рекомендации. В 1924 году Луи де Бройль выдвинул гипотезу о том, что частицам вещества присущи волновые свойства. Он писал: « В оптике в течение столетий пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым; не делалась ли в теории вещества обратная ошибка?» Луи де Бройль предложил сопоставить движению частиц волну (так называемую волну де Бройля), длину волны которой, по аналогии со световыми квантами (см. формулу (1.1)), можно вычислить по простой формуле

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}. \qquad (2.1)$$

Это утверждение в истории физики получило название *гипотезы де Бройля*.

Наличие волновых свойств у частиц вещества означает, что поведение частиц можно понять и описать, рассматривая поведение *сопоставленных* им волн де Бройля.

Рассмотрим на примере. Пусть поток частиц падает на преграду, в которой прорезаны две близко расположенные параллельные прорези. Как будут распределены частицы по поверхности экрана, расположенного за преградой с прорезями? Сопоставленная частицам волна де Бройля, проходя через две щели-прорези, будет интерферировать (опыт Юнга), и на экране для этой волны обнаружится чередование максимумов и минимумов. Это означает, что в те области экрана, в которых наблюдается максимум для волн де Бройля, частицы будут попадать чаще, а где минимум – вообще не будут попадать. Никаким другим способом объяснить, почему частицы, проходя через две прорези, попадают в одни точки экрана и не попадают в другие – невозможно. Единственно возможным ответом на вопрос, почему частицы ведут себя именно так, является: «Потому что так ведет себя сопоставленная им волна де Бройля».

Вопросы для самопроверки:

- Дайте определение волны.
- В чем состоит основное свойство волн? Обладают ли этим свойством волны де Бройля?
- Нарисуйте распределение вероятности попадания электронов в разные точки экрана при прохождении электронов через две щели.
- Нарисуйте график зависимости длины волны от энергии частицы для фотона и для электрона.
- Изобразите зависимость длины волны де Бройля от энергии частицы с учетом релятивистских эффектов.
- Напишите уравнение сферической волны де Бройля. Как зависит ее амплитуда от расстояния до источника?
- Напишите уравнение цилиндрической волны де Бройля. Как зависит ее амплитуда от расстояния до источника?

Задача 41. (1) Вычислить длину волны де Бройля, которую можно сопоставить электрону, движущемуся со скоростью 3000 км/с.

Задача 42. (1) Вычислить длину волны де Бройля, которую можно сопоставить α-частице, движущейся с энергией $3{,}0 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Задача 43. (1). Протон имеет дебройлевскую длину волны 12 пм. Найти кинетическую энергию (в электрон-вольтах) и импульс этого протона. Можно ли обнаружить отклонения от классической механики, изучая столкновение этого протона с другим протоном? Радиус протона 1,2 фм.

Задача 44. (2) Оценить длину волны де Бройля, которую можно сопоставить хоккейной шайбе, летящей в ворота после щелчка нападающего. Можно ли наблюдать волновые явления (интерференция, дифракция, …) для такой «частицы»?

Задача 45. (2) Вычислить дебройлевскую длину волны электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 990 В. Можно ли обнаружить отклонения от классической механики, изучая столкновение этого электрона с металлической пылинкой радиусом 200 нм?

Задача 46. (2) Протон движется в магнитном поле 0,25 Тл по окружности радиусом 10 см. Найти дебройлевскую длину волны этого протона. Можно ли обнаружить отклонения от классической механики, изучая столкновение этого протона с альфа-частицей? Радиус альфа-частицы 1,9 фм.

Задача 47. (3) Протоны движутся со скоростью 5000 км/с против оси *Ox* и отражаются от преграды, расположенной в начале координат. В какой ближайшей к преграде точке протоны будут обнаруживаться а) наиболее часто; б) наиболее редко, если условия отражения волны де Бройля от преграды таковы, что в точке отражения располагается узел стоячей волны.

Задача 48. (3) Электрон движется вдоль оси *Ox* между двумя отражающими стенками, расположенными в начале координат и в точке с координатой 0,627 мкм. Условия отражения волны де Бройля от стенок таковы, что в точках отражения располагаются узлы стоячей волны. Найти координаты точек, в которых электрон будет обнаруживаться наиболее часто, если его скорость а) 580 м/с; б) 1160 м/с.

Задача 49. (3) Поток электронов, имеющих энергию 0,15 мэВ, падает нормально на преграду с двумя узкими прорезями, расположенными на расстоянии 0,22 мкм друг от друга. Найти расстояние между двумя ближайшими участками экрана, расположенном на расстоянии 2,5 м от преграды, в которые электроны будут попадать с наибольшей вероятностью.

Задача 50. (3) Вычислить дебройлевскую длину волны электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 1300 кВ.

2.2. Соотношения неопределенностей

Методические рекомендации. *Соотношение неопределенностей Гейзенберга*, записанное для координаты и проекции импульса

$$\Delta p_x \Delta x \geq h\,, \tag{2.2}$$

означает, что у микрочастицы не могут быть измерены одновременно точное значение координаты частицы и проекция ее импульса на эту же ось координат. Разумеется, что такие же соотношения можно записать и для других осей. По сути, это соотношение определяет также минимально возможное значение проекции импульса частицы, движение которой ограничено интервалом Δx. Это соотношение можно интерпретировать так, что частица находится в ячейке фазового пространства размерами $2\pi\hbar$. Такая интерпретация очень полезна для целей квантовой статистической физики.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга можно записать также для энергии и времени

$$\Delta W \Delta t \geq h\,, \tag{2.3}$$

которое связывает время жизни микрочастицы на энергетическом уровне и ширину (неопределенность, погрешность энергии) уровня.

При вычислении погрешностей (неопределенностей) величин, связанных формулами с теми, что входят в соотношения неопределенностей, часто необходимо использовать выражение

$$\Delta y = \frac{dy(x)}{dx}\Delta x\,, \tag{2.4}$$

известное из математики и теории погрешностей лабораторного практикума по физике.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга, безусловно, справедливы и для макрочастиц, однако постоянная Планка столь мала, что непосредственно обнаружить описанные эффекты в макромире практически невозможно.

Вопросы для самопроверки:

- Запишите соотношение неопределенностей Гейзенберга для трех проекций импульса частицы и ее координат.

- Выведите соотношение неопределенностей для скорости нерелятивистской частицы и времени; для импульса этой же частицы и времени.

Задача 51. (1) Какой будет наименьшая возможная погрешность измерения проекции импульса молекулы, локализованной на отрезке 23 мкм?

Задача 52 (1) Размер атома имеет порядок величины 0,1 нм. Оценить наименьшую скорость, с которой может двигаться электрон в атоме.

Задача 53. (1) Размер ядра имеет порядок величины 10 фм. Оценить наименьшую скорость, с которой может двигаться нуклон в ядре.

Задача 54. (1) Найдите ширину энергетического уровня, время жизни частицы на котором равно 56 нс.

Задача 55. (2) Размер ядра имеет порядок величины 10 фм. Найдите минимальную массу частицы, которая может находиться в ядре.

Задача 56. (2) Электрон с кинетической энергией 15 эВ находится в металлической пылинке диаметром 1 мкм. С какой наилучшей относительной точностью может быть определена скорость этого электрона?

Задача 57. (3) Найдите время жизни электрона на энергетическом уровне в атоме, если ширина спектральной линии желтого цвета (560 нм) при переходе электрона с этого уровня в основное состояние равна 26 пм.

Задача 58. (3) Какой будет наименьшая возможная погрешность измерения модуля импульса молекулы, локализованной в кубике с ребром 23 мкм?

Задача 59. (3) Можно ли обнаружить отклонения от классической механики, изучая броуновское движение стальной пылинки радиусом 100 нм при комнатной температуре?

Задача 60. (3) На пути параллельного пучка нерелятивистских частиц с энергией W и массой m установлена диафрагма с щелью. При какой ширине щели b ее "изображение" на экране будет иметь минимальный размер?

3. ПРОСТЕЙШИЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ

3.1. Частица в БГОППЯ

Методические рекомендации. Потенциальная энергия частицы, находящейся в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с нулевым дном (БГОППЯ), может быть описана как

$$W_p(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x < 0, x > a, \end{cases} \quad (3.1)$$

то есть равна нулю внутри ямы и равна бесконечности вне ее. Тогда уравнение Шредингера для стационарных состояний, записанное для частицы массой m с энергией W, находящейся в яме, примет вид

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mW}{\hbar^2}\psi(x) = 0. \quad (3.2)$$

Очевидно, что вне ямы волновые функции должны быть тождественно равны нулю, так как вероятность того, что частица может проникнуть в область пространства, где ее потенциальная энергия бесконечно велика, равна нулю.

Тогда стационарные волновые функции, являющиеся решением этого уравнения Шредингера, должны удовлетворять граничным условиям

$$\psi(0) = \psi(a) = 0, \quad (3.3)$$

что обеспечивает непрерывность волновых функций.

Оказывается (в этом легко убедиться самостоятельно, так как процедура поиска решения дифференциального уравнения такого вида как уравнение Шредингера для частицы в яме хорошо известна из теории колебаний), что граничные условия могут быть удовлетворены только для дискретного набора значений энергии частицы

$$W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2. \quad (3.4)$$

Параметр n = 1, 2, 3, … определяет номер энергетического уровня и отражает дискретный характер энергетического спектра частицы.

Это означает, что квантовая частица, находясь в яме, не может иметь произвольное значение энергии, а ее энергия может принимать значения лишь из дискретного набора. Говорят, что энергия частиц *квантуется*. Значение n = 1 соответствует основному (невозбужденному) состоянию частицы, в котором частица может находиться сколь угодно долго, все другие состояния – возбужденные. Находясь на более высоком уровне (в возбужденном состоянии), частица будет стремиться в течение короткого времени «сбросить» избыток энергии (например, испустить фотон) и перейти в основное состояние.

Стационарные волновые функции, являющиеся решением стационарного уравнения Шредингера для частицы в БГОППЯ, удовлетворяющие граничным условиям и условию нормировки, имеют вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right). \tag{3.5}$$

Напомним, что квадрат модуля волновой функции равен плотности вероятности или функции распределения координаты частицы (см. Приложение 1).

Интегрированием функции распределения можно в явном виде получить *функцию распределения вероятности*

$$F_n(x) = \frac{x}{a} - \frac{1}{2\pi n} \sin\left[\frac{2\pi n}{a} x\right], \tag{3.6}$$

использование которой значительно облегчает процесс вычисления вероятности обнаружения частицы в различных частях ямы.

Интересно заметить, что при изучении поведения многих квантовых систем часто оказывается более важным знать не само решение уравнения Шредингера (волновые функции), а *условия, при которых это решение существует*, то есть спектр разрешенных энергетических состояний частицы!

Вопросы для самопроверки:

- Нарисуйте стационарные волновые функции для третьего возбужденного состояния частицы в БГОППЯ.
- Нарисуйте потенциальную яму, в которой движется мячик, если он подпрыгивает, ударяясь об землю.
- Получите формулу (3.6).

Задача 61. (1) Вычислить энергию основного и первых двух возбужденных состояний электрона в БГОППЯ с нулевым дном шириной 0,37 нм. Изобразите эти уровни на оси энергий, направленной вверх.

Задача 62. (1) Найти плотность вероятности обнаружить электрон в БГОППЯ с нулевым дном в середине ямы, если он находится 1) в основном состоянии; 2) в первом возбужденном состоянии.

Задача 63. (2) Вычислить разность энергий первого и четвертого возбужденных уровней энергии протона при движении его в БГОППЯ с нулевым дном шириной 12 фм. Ответ выразить в мегаэлектронвольтах.

Задача 64. (2) Вычислить разность энергий четвертого и шестого возбужденных уровней энергии электрона при движении его в БГОППЯ с нулевым дном шириной 0,12 нм. Ответ выразить в электронвольтах.

Задача 65. (2) Частица массой $5 \cdot 10^{-22}$ г движется в БГОППЯ с нулевым дном шириной 20 пм. Сколько фотонов длиной волны 500 нм может излучить эта частица при переходе из шестого возбужденного в третье возбужденное состояние?

Задача 66. (2) Вычислить вероятность обнаружения частицы в интервале $a/3 \leq x \leq a$ при движении ее в БГОППЯ с нулевым дном шириной a. Частица находится в основном состоянии.

Задача 67. (2) Вычислить отношение вероятности нахождения частицы в первом возбужденном состоянии к вероятности ее нахождения в основном состоянии в интервале $\Delta x = 0{,}4a$, равноудаленном от стенок БГОППЯ шириной a.

Задача 68. (2) Электрон находится в БГОППЯ с нулевым дном шириной a во втором возбужденном энергетическом состоянии. Определить, в каких точках интервала $0 \leq x \leq a$ плотность вероятности обнаружить частицу имеет максимальное и минимальное значения. Решение пояснить рисунком.

Задача 69. (3) Альфа-частица находится в БГОППЯ с нулевым дном шириной a в возбужденном энергетическом состоянии с номером n. Определить вероятность найти частицу в интервале шириной $a/10$ вблизи центра ямы.

Задача 70. (3) Ядро кислорода находится в БГОППЯ с нулевым дном шириной a в возбужденном энергетическом состоянии с номером 20. Определить вероятность найти ядро в интервале шириной $a/6$ вблизи левого края ямы.

3.2. Одномерный гармонический осциллятор

Методические рекомендации. Для *одномерного гармонического осциллятора* зависимость потенциальной энергии от координаты частицы хорошо известна и имеет вид

$$W_p(x) = \frac{kx^2}{2}, \tag{3.7}$$

если положение равновесия совпадает с началом координат. Движение такой квантовой частицы должно напоминать движение небольшого тела, закрепленного на пружине – классического гармонического осциллятора. Уравнение Шредингера для такой квантовой системы принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-\frac{kx^2}{2}\right)=0. \tag{3.8}$$

Граничные условия состоят в том, что частица не может оказаться далеко от положения равновесия, то есть $\psi\left(|x|\to\infty\right)\to 0$ (волновая функция должна убывать на бесконечности). В отличие от классической частицы, которая не может покинуть пределы потенциальной ямы, квантовая частицы может обнаруживаться за пределами ямы. Наличие граничных условий, в конечном счете, приводит к тому, что спектр разрешенных энергетических состояний становится дискретным (как и в БГОППЯ):

$$W_n=\hbar\omega\left(n+1/2\right). \tag{3.9}$$

Такой спектр называется *эквидистантным* – любые два соседних уровня энергии находятся на одинаковом «расстоянии» (энергетическом!) друг от друга. Кроме этого, квантовый гармонический осциллятор не может иметь энергию меньше $W_0=\hbar\omega/2$ – так называемая энергия *нулевых колебаний*.

Волновые функции, являющиеся решением этого уравнения и удовлетворяющие граничным условиям, имеют вид

$$\psi_n(\xi)=N_nH_n(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \tag{3.10}$$

где $N_n=\left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\dfrac{1}{\sqrt{2^n n!}}$ – нормировочный множитель,

$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\dfrac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}$ – так называемые *полиномы Эрмита*, первые несколько значений которых равны $H_0=1$, $H_1(\xi)=2\xi$, $H_2(\xi)=4\xi^2-2$ для $n=0$, $n=1$, $n=2$ соответственно (убедитесь в этом самостоятельно),

$\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ – безразмерная переменная, пропорциональная координате,

$\omega = \sqrt{k/m}$ – хорошо известная из классической механики циклическая частота гармонического осциллятора.

Напомним, что физическим смыслом обладает не сама волновая функция, а квадрат ее модуля.

Вопросы для самопроверки:

- Нарисуйте стационарные волновые функции для третьего возбужденного состояния гармонического осциллятора.
- Нарисуйте потенциальную яму, соответствующую движению шарика, колеблющегося на ниточке, если амплитуда колебаний не мала.

Задача 71. (1) Вычислить наименьшее возможное значение энергии квантового гармонического осциллятора, собственная циклическая частота колебаний которого 25 пс$^{-1}$.

Задача 72. (2) Ион железа в узле кристаллической решетки – пример гармонического осциллятора. Найти «расстояние» между соседними уровнями энергии такого осциллятора, если частота его колебаний около 10^{15} с$^{-1}$.

Задача 73. (2) Вычислить энергии первых трех уровней для частицы массой 96 нг, которая может колебаться на "пружинке" жесткостью 12 мкН/м. Сможем ли мы обнаружить дискретность энергетического спектра этой частицы, если энергия теплового движения порядка 0,022 эВ?

Задача 74. (2) Оценить количество состояний гармонического осциллятора в интервале энергий от 1,00 до 1,01 нДж. Жесткость осциллятора 3,2 мкН/м, масса 9,6 нг.

Задача 75. (2) Вообразим два "осциллятора", представляющих собой слона и мышку, каждый из которых подвешен на пружинке, которая под их собственным весом растягивается на 9 см. Сколько уровней энергии "слонового" осциллятора уложится ниже первого возбужденного уровня энергии "мышиного"?

Задача 76. (2) Вычислить значение плотности вероятности, соответствующей положению равновесия квантового гармонического осциллятора, находящегося 1) в первом; 2) во втором возбужденном состоянии и имеющего массу 33 пг и жесткость 45 нН/м.

Задача 77. (3) Вычислить вероятность того, что гармонический осциллятор, находящийся в основном состоянии и имеющий массу 10 мкг и частоту 10^{10} $с^{-1}$, будет обнаружен в классически запрещенной области.

Задача 78. (3) Вычислить вероятность, с которой можно обнаружить гармонический осциллятор, находящийся в первом возбужденном состоянии и имеющий массу 10^{-25} кг и частоту 10^{17} $с^{-1}$, в области $x \in \left(-0{,}1x_m; 0{,}1x_m\right)$, если x_m – классические точки остановки.

Задача 79. (3) В каких точках гармонический осциллятор массой 28 фг, имеющий частоту колебаний 23 $нс^{-1}$ и находящийся в четвертом возбужденном состоянии, будет обнаруживаться наиболее часто?

Задача 80. (4) Получить формулу для вероятности найти гармонический осциллятор в классически запрещенной области исходя из 1) квантовых; 2) классических представлений.

4. АТОМ ВОДОРОДА

4.1. Квантование энергии

Методические рекомендации. Электрон в атоме водорода или водородоподобном (то есть содержащем только один электрон) ионе движется в центрально симметричном кулоновском поле ядра с потенциальной энергией

$$W_p = -k_e \frac{Ze^2}{r}. \qquad (4.1)$$

В отличие от простейших одномерных квантовых систем, рассмотренных выше, атом водорода – объемный объект, поэтому для его описания требуются трехмерные уравнения. Уравнение Шредингера для стационарных состояний в трехмерном случае имеет вид

$$\Delta\psi\left(\vec{r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W + k_e \frac{Ze^2}{r}\right)\psi\left(\vec{r}\right) = 0, \qquad (4.2)$$

Волновые функции $\psi = \psi_{klm}\left(r, \theta, \varphi\right)$, являющиеся решением этого уравнения и удовлетворяющие граничным условиям и требованию непрерывности, гладкости и ограниченности волновых функций и их производных, существуют лишь при дискретном наборе трех целых чисел k, l, m, отвечающих соответственно за радиальную, азимутальную и полярную составляющие волновых функций. Вследствие этого состояние электрона в атоме водорода (или в водородоподобном ионе) определяется квантовыми числами: главным квантовым числом $n = k + l$ (n = 1, 2, 3, ...), определяющим дискретность энергетического спектра электрона в атоме; орбитальным квантовым числом l (l = 0, 1, 2, ... n – 1), определяющим дискретность модуля момента импульса электрона; магнитным квантовым числом m_{lz} (m_{lz} = –l, –l+1,..., 0,..., l–1, l), определяющим проекцию момента импульса на выбранное направление; а также спиновым квантовым числом m_{sz} (m_{sz} = –1/2, +1/2), связанным с двумя возможными проекциями спина электрона на выбранное направление. Каждое из них соответствует физической величине, значение которой точно определено в данном состоянии.

Состояние электрона в обсуждаемом случае символически записывается в виде $n\alpha$, где $\alpha = s$ при $l = 0$; $\alpha = p$ при $l = 1$; $\alpha = d$ при $l = 2$; $\alpha = f$ при $l = 3$. С большими значениями орбитального квантового числа обычно сталкиваться не приходится.

Собственные значения энергии определяются исключительно главным квантовым числом и могут быть представлены в виде:

$$W_n = -W_i / n^2 \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (4.3)$$

Величина W_i называется энергией ионизации. Ее численное значение для атома водорода равно 13,6 эВ. Для водородоподобного иона она имеет вид:

$$W_i = \frac{\tilde{m}_e e^4 Z^2}{2\hbar^2 \left(4\pi\varepsilon_0\right)^2} = \frac{\tilde{m}_e e^4 Z^2 k_e^2}{2\hbar^2}. \qquad (4.4)$$

Здесь $\tilde{m}_e$ – приведенная масса, которая менее чем на 1% отличается от массы электрона; Z – зарядовое число (число протонов) ядра водородоподобного иона.

При получении энергии (столкновение, поглощение фотона) электроном атома (часто говорят, что энергия поглощается атомом) он переходит на более высокий энергетический уровень, а при обратном переходе с более высокого уровня на более низкий электроном (атомом) излучается фотон, энергия которого равна разности энергий уровней, между которыми произошел переход

$$W_{ф} = W_{u(p)} - W_{d(own)} \quad (4.5)$$

Переходы электрона с уровня на уровень ограничены так называемыми правилами отбора, которые есть следствие законов сохранения. Для водородоподобных ионов это правило заключается в том, что орбитальное квантовое число при переходе должно изменяться (уменьшаться или увеличиваться) только на единицу.

Вопросы для самопроверки:

- Какая физическая величина определяется орбитальным квантовым числом?
- Какая физическая величина определяется магнитным квантовым числом?
- Какая физическая величина определяется спиновым квантовым числом?
- Нарисуйте несколько разрешенных переходов, приводящих к спектральным линиям серии Бальмера.
- Нарисуйте несколько разрешенных переходов, приводящих к спектральным линиям серии Лаймана.
- Нарисуйте несколько разрешенных переходов, приводящих к спектральным линиям серии Пашена.
- Какие из следующих переходов разрешены правилами отбора: $1s \to 2p$; $2p \to 3p$; $2s \to 2f$; $1s \to 2s$; $2p \to 3d$.

Задача 81. (1) Найти энергию основного состояния электрона в 1) атоме водорода; 2) однозарядном ионе гелия; 3) дважды ионизованном атоме лития.

Задача 82. (1) Найти энергию 1) второго возбужденного состояния электрона в атоме водорода; 2) третьего возбужденного состояния в однозарядном ионе гелия.

Задача 83. (1) Свет какой длины волны будет излучаться нагретым водородом, если в атомах водорода происходят переходы электронов из второго возбужденного состояния в первое возбужденное состояние?

Задача 84. (2) В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света в видимой части спектра излучения наблюдались три спектральные линии?

Задача 85. (2) В каких пределах должна лежать энергия электронов, чтобы при возбуждении ими атома водорода его спектр содержал шесть спектральных линий?

Задача 86. (2) Какую наименьшую скорость должны иметь электроны, чтобы при возбуждении ими атома водорода в его спектре появилась линия, соответствующая максимальной длине волны в серии Пашена?

Задача 87. (3) Какую наименьшую ускоряющую разность потенциалов должны пройти электроны, чтобы при возбуждении ими однократно ионизованного атома гелия в его спектре появилась линия, соответствующая максимальной длине волны в серии Лаймана?

Задача 88. (2) Какой наименьший импульс должны иметь электроны, чтобы при возбуждении ими атома водорода в его спектре появилась линия, соответствующая максимальной длине волны в серии Бальмера?

Задача 89. (2) Вычислите энергию связи электрона в трехзарядном положительном ионе бериллия.

Задача 90. (2) Какова максимальная длина волны фотона, испускаемого четырехзарядным положительным ионом бора при переходе из 3*s* состояния?

4.2. Волновые функции и квантование момента импульса

Методические рекомендации. *Собственные значения модуля момента импульса* определяются исключительно орбитальным (азимутальным) квантовым числом и могут быть вычислены по формуле

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{4.6}$$

Проекция момента импульса на выбранное направление Oz определяется исключительно магнитным квантовым числом и вычисляется по формуле

$$L_{lz} = m_{lz}\hbar, \quad m_{lz} = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l. \tag{4.7}$$

Очевидно, что проекция вектора не может превышать его длину (модуль), что и приводит к тому, что магнитное квантовое число не превышает орбитальное. Две другие проекции момента импульса не определены.

Из приведенного списка возможных значений орбитального и магнитного квантовых чисел видно, что одному и тому же значению энергии отвечают несколько различных состояний электрона. Уровень энергии, которому соответствуют несколько состояний, называется вырожденным. Число различных состояний, отвечающих одному и тому же значению энергии, называется кратностью вырождения энергетического уровня. Кратность вырождения энергетических уровней в атоме водорода (с учетом вырождения по спину) определяется формулой

$$2\sum_{l=0}^{n}\left(2l+1\right)=2n^{2}. \tag{4.8}$$

В заключение выпишем несколько волновых функций, являющихся решением уравнения Шредингера для атома водорода и водородоподобного иона. Для атома в основном (1s) состоянии

$$\psi_{000}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}}\,e^{-r/r_0}, \tag{4.9}$$

в первом возбужденном 2*s*-состоянии

$$\psi_{100}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{8\pi r_0^3}}\left(1-\frac{r}{2r_0}\right)e^{-r/2r_0} \tag{4.10}$$

и в первом возбужденном 2*p*-состоянии

$$\psi_{11m}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6r_0^5}}\,e^{-r/2r_0}\cdot\begin{cases} i\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, & \left(m=0\right)\\ \mp i\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}, & \left(m=\pm1\right)\end{cases} \tag{4.11}$$

Здесь $r_0 =$ 52,9 пм – так называемый *радиус первой боровской орбиты*.

Вопросы для самопроверки:

- Почему орбитальное квантовое число не может превысить главное квантовое число?
- Докажите справедливость утверждения, что $L_{z_m} \le L_l$. Какому случаю соответствует знак равенства в этом неравенстве?
- Изобразите возможные положения вектора момента импульса для нескольких первых значений орбитального квантового числа (l = 1, 2, 3, 4).

- Докажите справедливость формулы (4.8).
- Проверьте, нормированы ли волновые функции (4.9) – (4.11).

Задача 91. (1) Чему равен модуль момента импульса электрона в атоме водорода, находящегося в $2p$-состоянии?

Задача 92. (2) Чему равны возможные значения проекции момента импульса электрона в атоме водорода, находящегося в $3d$-состоянии?

Задача 93. (3) Найти возможные значения угла между вектором момента импульса электрона в атоме водорода, находящегося в $2p$-состоянии, и направлением внешнего магнитного поля.

Задача 94. (2) Найти наиболее вероятное расстояние электрона, находящегося в основном состоянии в атоме водорода, от центра атома.

Задача 95. (2) Найти вероятность, с которой электрон, находящийся в основном состоянии в атоме водорода, будет обнаружен вблизи наиболее вероятного расстояния от центра атома, то есть в интервале от $0{,}95r_0$ до $1{,}05r_0$.

Задача 96. (2) Найти наиболее вероятное расстояние электрона, находящегося в $2s$-состоянии в атоме водорода, от центра атома.

Задача 97. (2) В окрестности какой точки электрон в атоме водорода, характеризующийся набором квантовых чисел (1, 1, –1), будет обнаруживаться с наибольшей вероятностью?

Задача 98. (3) Электрон в атоме водорода характеризуется квантовыми числами (1, 1, 1, ½). Найти вероятность того, что электрон будет обнаружен в небольшом объеме $\Delta V = r^2 \sin\Theta\,\Delta r\,\Delta\varphi\,\Delta\Theta$ ($\Delta r = 0{,}01 r_0, \Delta\varphi = \Delta\Theta = 1°$) вблизи точки, сферические координаты которой ($2r_0$, 30°, 60°)

Задача 99. (4) Электрон в атоме водорода находится в первом возбужденном p-состоянии и имеет наименьшее значение проекции момента импульса на выбранное направление. Вычислить вероятность найти электрон в области от $0{,}9r_0$ до $1{,}1r_0$ при любых Θ.

Задача 100. (3) Найти среднее расстояние электрона, находящегося в основном состоянии в атоме водорода, от центра атома.

5. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

Методические рекомендации. Прохождение квантовой частицы из одной классически разрешенной для движения области в другую, когда частица преодолевает потенциальный барьер, называется туннельным эффектом. Это чисто квантовый эффект, не имеющий классического аналога. Наиболее интересной величиной здесь является коэффициент проницаемости барьера – вероятность того, что частица пройдет через барьер с одной попытки.

Для прямоугольного барьера шириной a и высотой W_b точное выражение для коэффициента прохождения Π_b имеет вид:

$$\Pi_b = 4k_b{}^2k^2 \Big/ \left[\left(k_b{}^2 + k^2 \right)^2 \operatorname{sh}^2 k_b a + 4k_b{}^2 k^2 \right] \tag{5.1}$$

Здесь $k = \sqrt{2mW} \big/ \hbar$; $k_b = \sqrt{2m\left(W_b - W\right)} \big/ \hbar$; W – полная энергия частицы. Если процесс существенно подбарьерный, т. е. в (5.1) $k_b a >> 1$, для Π_b получается приближенное выражение:

$$\Pi_b \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} a \sqrt{2m\left(W_b - W\right)} \right] \tag{5.2}$$

Оно справедливо для прямоугольного барьера.

Для барьера произвольной формы коэффициент прохождения может быть оценен по приближенной формуле:

$$\Pi_b \approx \exp\left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m\left(W_p(x) - W\right)} \right\} \tag{5.3}$$

Здесь x_1 и x_2 – классические точки остановки, т. е. точки входа под барьер и выхода из под него соответственно.

Для решения задач понадобятся массы некоторых частиц. Они приведены в табл. 1 Приложения 3 "Справочные сведения".

Вопросы для самопроверки

- Приведите примеры ядерно-физических явлений, объясняемых туннельным эффектом.
- Изобразите на графике зависимость коэффициента проницаемости прямоугольного барьера от его толщины.

- Изобразите на графике зависимость коэффициента проницаемости прямоугольного барьера от его высоты.
- Проинтерпретируйте туннельный эффект с помощью соотношения неопределенностей для энергии и времени.
- Приведите пример устройства, в котором туннельный эффект находит практическое применение.

Задача 101. (2) Вероятность прохождения нейтрона через прямоугольный барьер высотой 10 МэВ и шириной 10 фм составляет 1%. Какова скорость этого нейтрона?

Задача 102. (3) Два электрона, имеющие энергию 3 эВ, проходят через прямоугольные потенциальные барьеры высотой 5 эВ и 7 эВ и шириной 0,10 нм и 50 пм соответственно. Во сколько раз коэффициент прозрачности больше для первого барьера?

Задача 103. (2) Оценить коэффициент прохождения через барьер, изображенный на рис. 1, для электрона.

Задача 104. (3) Оценить коэффициент прозрачности барьера, изображенного на рис. 2, для позитрона.

Задача 105. (2) Оценить вероятность того, что электрон пройдет через барьер, изображенный на рис. 3.

Задача 106. (2) Оценить прозрачность барьера (рис. 4) для мюона.

Задача 107. (2) Коэффициент прозрачности барьера, изображенного на рис. 5, для протона равен 0,003. Каким импульсом обладает этот протон?

Задача 108. (3) Оценить прозрачность барьера, изображенного на рис. 6, для альфа-частицы.

Задача 109. (3) Как и во сколько раз изменится коэффициент прохождения барьера, изображенного на рис. 6, если альфа-частицу заменить на нестабильный изотоп гелий-6?

Задача 110. (4) Среднее время жизни нестабильного изотопа гелий-8 составляет 119 мс. Сколько процентов ядер гелий-8 пройдет через барьер, изображенный на рис. 6, прежде чем распадется?

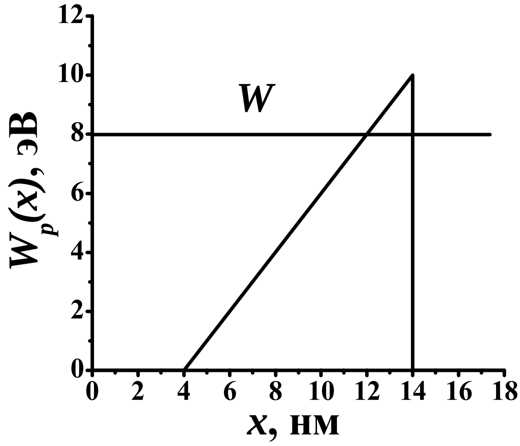

Рис. 1.

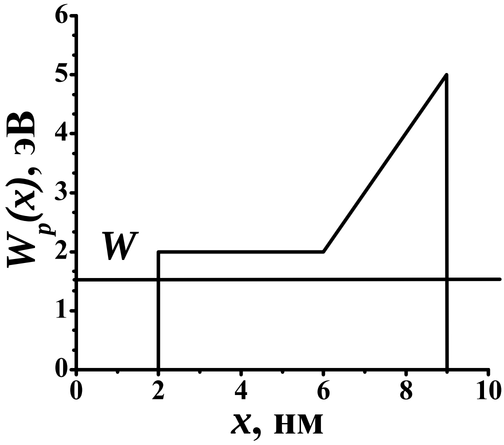

Рис. 2.

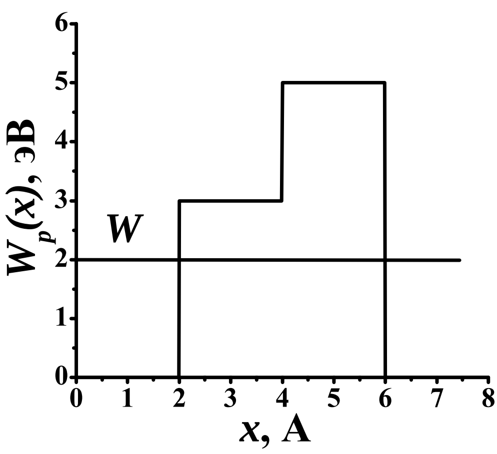

Рис. 3.

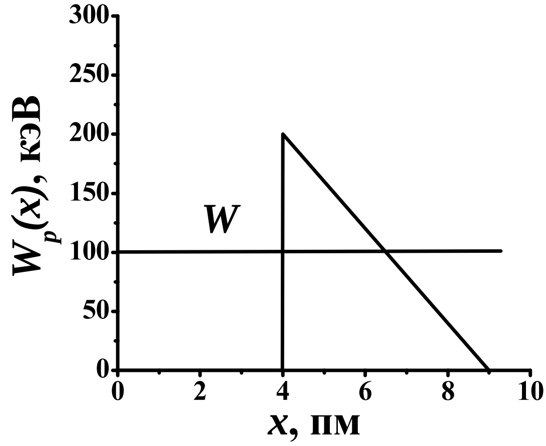

Рис. 4.

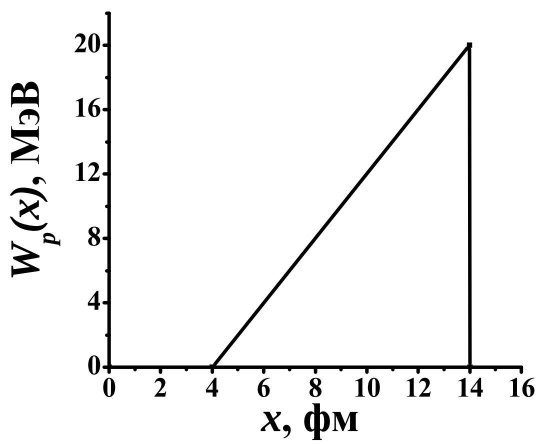

Рис. 5.

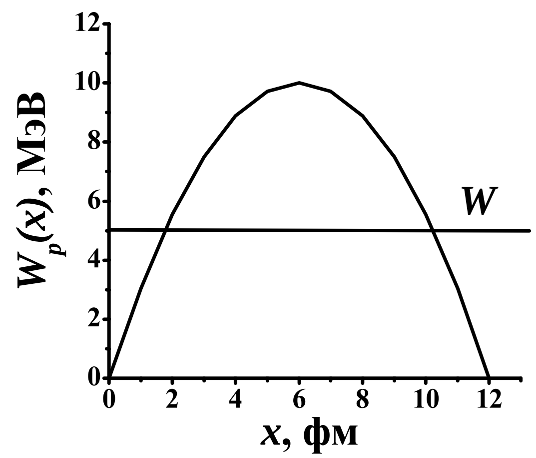

Рис. 6.

Приложение 1. Понятие о функции распределения

Для успешного изучения квантовой механики и последующих разделов курса физики необходимо знание некоторых понятий и формул теории вероятности и математической статистики. Напомним некоторые из них.

Функция распределения (или *плотность вероятности*) $f(x)$ некоторой случайной физической величины X показывает, как часто величина X будет принимать значения вблизи x. Поясним это на примере.

Довольно часто поведение случайной величины описывается так называемой *функцией распределения Гаусса*

$$f_G(x) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}. \tag{П1.1}$$

График этой функции напоминает сечение колокольчика с максимумом при $x = \mu$. Значит, значения x вблизи числа μ встречаются чаще (функция распределения вблизи этого значения велика), а чем дальше число x отстоит от μ, тем реже оно встречается. Именно по Гауссу распределены значения прямых измерений, получаемые при выполнении лабораторных работ. В этом разделе курса физики под значением случайной величины часто понимают координату точки, в которой может быть обнаружена квантовая частица.

Математический смысл плотности вероятности (функции распределения) состоит в том, что через нее выражается малая вероятность $d\Pi$ найти частицу в малом интервале dx вблизи заданной точки x (в интервале от x до $x + dx$):

$$d\Pi = f(x)\,dx \tag{П1.2}$$

Формулу (П1.2) можно считать определением плотности вероятности, поскольку

$$f(x) = \frac{d\Pi}{dx}, \tag{П1.3}$$

что напоминает определение плотности в одномерном случае (например, линейной плотности заряда) – отсюда и название!

Если известна функция распределения, то интегрированием формулы (П1.2) на конечном интервале (x_1, x_2) можно получить *вероятность*

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\,, \tag{П1.4}$$

с которой частицу можно обнаружить внутри этого интервала.

Как правило, функция распределения (плотность вероятности) удовлетворяет *условию нормировки*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1\,, \tag{П1.5}$$

смысл которого заключается в том, что вероятность обнаружить частицу на всей числовой оси равна 1.

Часто для расчета вероятности нахождения частицы в некотором интервале числовой оси удобно пользоваться *функцией распределения вероятности*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{П1.6}$$

которая показывает вероятность того, что частица находится на оси левее числа x. Тогда, очевидно, вероятность обнаружить частицу в интервале (x_1, x_2) равна

$$\Pi = F(x_2) - F(x_1) \tag{П1.7}$$

Используя хорошо известную в математической статистике *теорему о произведении вероятностей независимых событий*, записанные выше формулы можно распространить на двумерный или трехмерный случай.

Так, плотность вероятности $f(\vec{r})$ в трехмерном случае определяет малую вероятность того, что частица будет обнаружена в малом объеме dV

$$d\Pi = f(\vec{r})\,dV \tag{П1.8}$$

Тогда формула (П1.4) и условие нормировки (П1.5) примут вид

$$\Pi = \int_{V} f(\vec{r})\,dV\,, \tag{П1.9}$$

$$\int_{V\to\infty} f(\vec{r})\,dV = 1\,. \tag{П1.10}$$

В (П1.9) интегрирование ведется по интересующему объему пространства, а в (П1.10) – по всему пространству.

Элемент объема интегрирования dV в декартовых координатах очевидно равен

$$dV = dx\,dy\,dz\,, \tag{П1.11}$$

а в сферических координатах

$$dV = r^2 \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi\, dr\,. \tag{П1.12}$$

Упражнение. Пусть плотность вероятности попадания фотонов на экран имеет вид гауссова распределения. Определить вероятность попадания фотонов в интервал $x \in \left(-0{,}3\sigma; 0{,}3\sigma\right)$.

П р и л о ж е н и е 2 . У р а в н е н и е Ш р е д и н г е р а

Поведение квантовой частицы не может быть описано с помощью классических величин, таких как координата и импульс как функции времени, сила. Не «работает» в квантовом мире и второй закон Ньютона. На смену ему приходит *уравнение Шредингера* (Нобелевская премия 1933 года), которое для одномерной системы имеет вид:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi\left(x,t\right)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi\left(x,t\right)}{\partial x^2} + W_p\left(x\right)\Psi\left(x,t\right). \tag{П2.1}$$

В уравнении Шредингера внешними факторами, влияющими на его решение, являются две величины: масса квантовой частицы и вид потенциальной ямы, в которой эта частица находится. Вид потенциальной ямы задается потенциальной функцией $W_p\left(x\right)$, которая определяет зависимость потенциальной энергии частицы от ее координаты. Неизвестной в этом уравнении является функция координаты и времени $\Psi(x,t)$, которая называется *волновой функцией*. Смысл волновой функции как решения уравнения Шредингера заключается в том, что волновая функция позволяет вычислить *плотность вероятности*

$$f\left(x,t\right) = \left|\Psi\left(x,t\right)\right|^2. \tag{П2.2}$$

Волновую функцию как решение уравнения Шредингера в обсуждаемом случае можно представить в виде

$$\Psi\left(x,t\right) = \psi(x)e^{-iWt/\hbar}\,, \tag{П2.3}$$

разделяя тем самым координатную и временну́ю зависимости волновой функции. Подставляя это выражение в уравнение Шредингера, легко получить так называемое *уравнение Шредингера для стационарных состояний*

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-W_p(x)\right)\psi(x)=0\,, \tag{П2.4}$$

решением которого являются волновые функции, зависящие только от координат. Смысл волновой функции (или *амплитуды вероятности*) как решения уравнения Шредингера заключается в том, что квадрат модуля волновой функции равен *плотности вероятности* (функции распределения), характеризующей распределение вероятности обнаружения частицы в различных участках числовой оси

$$f(x)=\left|\psi(x)\right|^2. \tag{П2.5}$$

Упражнение. Доказать, что если $W_p(x)$ – потенциальная энергия, зависящая только от координат, то выражение (П2.3) является решением уравнения Шредингера (П2.1), а также, что справедливо равенство $\left|\psi(x)\right|^2=\left|\Psi(x,t)\right|^2$.

6. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Таблица 1

Некоторые физические постоянные

Постоянная	Значение
Скорость света, м/с	$2{,}99792458 \cdot 10^{8}$
Элементарный заряд, Кл	$1{,}6021773 \cdot 10^{-19}$
Масса покоя электрона и позитрона, кг	$9{,}1093898 \cdot 10^{-31}$
Масса покоя протона, кг	$1{,}6726231 \cdot 10^{-27}$
Масса покоя нейтрона, кг	$1{,}6749286 \cdot 10^{-27}$
Постоянная Планка h, Дж·с	$6{,}6260755 \cdot 10^{-34}$
Постоянная Планка $\hbar$, Дж·с	$1{,}0545727 \cdot 10^{-34}$
Постоянная Больцмана, Дж/К	$1{,}3806581 \cdot 10^{-23}$

Таблица 2

Работа выхода электронов из некоторых металлов

Металл	Работа выхода, эВ	Металл	Работа выхода, эВ
Алюминий	4,2	Натрий	2,3
Барий	2,4	Никель	4,5
Вольфрам	4,5	Платина	5,3
Калий	2,2	Рубидий	2,2
Литий	2,4	Серебро	4,3
Медь	4,4	Цезий	1,8
Молибден	4,3	Цинк	4,0

Библиографический список

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М., 1985. 432 с.
2. Джанколи И.В. Физика Т.2. М., 1989. 667 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.3. М., 1982. 304 с.
4. Нерсесов Э.А. Основные законы атомной и ядерной физики. М., 1988. 288 с.
5. Гольдин Л.Л., Новикова Г.И. Введение в квантовую физику. М., 1988. 328 с.
6. Пономарев Л.И. Под знаком кванта. М., 1984. 352 с.
7. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М., 1976. 664 с.
8. Физический энциклопедический словарь. М., 1984. 944 с.