

Введение.

В этом разделе курса физики мы будем изучать *системы большого числа частиц*. Первоначальное знакомство с *небольшой частью* вопросов, возникающих при изучении таких систем, вы получили в школе, изучая молекулярную физику и термодинамику.

В основе электроники лежат физические законы, описывающие поведение огромного количества электронов (и других микрочастиц), движущихся в различных средах. Именно эти законы определяют работу диодов, транзисторов, микросхем, процессоров, ячеек памяти, и т. д. Какие же это законы?

Динамический подход. Поведение движущихся частиц можно рассматривать с помощью уравнений движения, записанных

на основе II-го закона Ньютона: $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i$. Напомним,

что для *каждой частицы* необходимо записать три дифференциальных уравнения, при интегрировании которых требуется три пары начальных условий x_0 и v_{x0} . Такой подход невозможен для систем большого числа частиц как по техническим, так и по принципиальным соображениям. Во-первых, даже в 1 мм^3 вещества (а это размер кристалла полупроводникового диода, транзистора, ...) содержится $\sim 10^{17}$ атомов. Ни одна суперсовременная ЭВМ ни сегодня, ни в обозримом будущем, не справится с решением такого числа уравнений. А во-вторых, известное соотношение неопределенностей Гейзенберга ($\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$) запрещает одновременное определение точных значений именно той пары физических величин, которые необходимы как начальные условия при интегрировании уравнений движения, что делает принципиально невозможным точное описание движения даже одной микрочастицы. Таким образом, *динамический подход непригоден для систем большого числа частиц*.

Термодинамический метод описания систем большого числа частиц работает с *коллективными характеристиками*

объекта исследования, не вдаваясь в детали структуры этого объекта. Такими коллективными характеристиками являются, например, хорошо известные из школьного курса физики так называемые *термодинамические параметры*: давление, объем и температура. Система большого числа частиц описывается в этом подходе так называемым уравнением состояния $f(p, V, T) = 0$. Примером такого уравнения является хорошо известное со школы уравнение состояния идеального газа Менделеева–Клапейрона: $pV = \frac{m}{M} RT$.

Статистический метод описания систем большого числа частиц основан на большом многообразии законов природы, которые не проявляют себя при анализе поведения нескольких частиц (если частицы не являются квантовыми!), однако великолепно (с большой точностью!) работают, если число частиц велико. Для квантовых частиц статистический метод необходимо применять даже для изучения небольшого количества частиц. *Статистический метод рассматривает параметры движения частицы (например, координата, направление и модуль скорости частицы) как случайные величины*, оперирует с усредненными характеристиками системы частиц, с функциями распределения, с вероятностями обнаружения частицы в том или ином состоянии.

Идеальный газ. Статистический и термодинамический методы изучения систем большого числа частиц дополняют друг друга. При их применении чрезвычайно полезной является модель *идеального газа* – наиболее простая модель системы многих частиц. По определению, *идеальным газом называется большое число точечных материальных частиц с конечной массой, между которыми отсутствуют силы взаимодействия, действующие на расстоянии, и которые сталкиваются между собой по законам соударения шаров*. Простота модели делает ее удобной для знакомства с методами изучения систем большого числа частиц.

В этом разделе физики под газом не всегда понимают газ молекул, что и отражено в определении идеального газа.

1. Вероятность.

Законы статистической физики описывают огромный пласт физических явлений, которые до сих пор (за исключением части вопросов квантовой механики) оставались за рамками нашего внимания.

Задачи, которые решаются статистическим методом, коренным образом отличаются от задач динамического подхода. Статистический метод не ответит на вопрос, где будет находиться заранее выбранная молекула, какой будет ее скорость, по какой траектории она будет двигаться. Да это и не нужно: ведь все молекулы одинаковы! Несколько позже мы увидим, что нужно знать, чтобы иметь наиболее полную информацию о статистической системе.

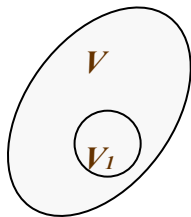
Определение вероятности. Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных событию A исходов испытания к общему числу испытаний при стремлении последнего к бесконечности, т. е. $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$.

Пример 1: при подбрасывании монеты примерно в половине случаев будет выпадать, например, орел. Вероятность того, что при очередном подбрасывании монеты выпадет орел, равна 50%

Пример 2: при подбрасывании игральной кости (кубика) примерно в каждом шестом случае будет выпадать, например, «пятерка». Вероятность того, что при очередном подбрасывании кубика выпадет «пятерка», равна 16,66 (6)%

Пример 3: Пусть событие A – обнаружение выбранной молекулы в части V_1 объема V . При длительном наблюдении за этой молекулой она многократно побывает в каждом элементе объема ($\Delta V \ll V_1$, $\Delta V \ll V$). Тогда вероятность события A можно понимать как

$$P(A) = P(V_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{V_1}}{N} = \frac{V_1}{V}.$$



Сложение вероятностей взаимоисключающих событий.

Выделим в объеме V два объема V_1 и V_2 , как показано на рисунке. Видно, что произвольная молекула *может* находиться либо в V_1 , либо в V_2 , либо не находиться ни в одном из выделенных частей объема, но *не может* одновременно находиться и в V_1 , и в V_2 . Тогда, в соответствии с примером 3 предыдущего пункта, можно записать $P(V_1) = \frac{V_1}{V}$ и

$$P(V_2) = \frac{V_2}{V}.$$

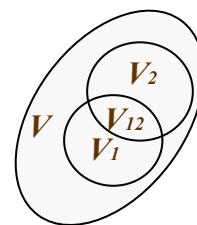
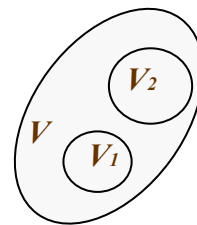
На том же основании вероятность того, что молекула окажется хотя бы в одном из выделенных объемов, равна $P(V_1 + V_2) = \frac{V_1 + V_2}{V} = P(V_1) + P(V_2)$.

Итак, закон сложения вероятностей взаимоисключающих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$, то есть вероятность того, что происходит либо событие A , либо событие B (сумма взаимоисключающих событий) равна сумме вероятностей этих событий.

Сложение вероятностей в общем случае. Выделим в объеме V два объема V_1 и V_2 , как показано на рисунке. Видно, что произвольная молекула *может* находиться либо в V_1 , либо в V_2 , либо одновременно и в V_1 , и в V_2 (объем V_{12}). Тогда, по аналогии с предыдущим пунктом, можно записать $P(V_1) = \frac{V_1}{V}$, $P(V_2) = \frac{V_2}{V}$ и $P(V_{12}) = \frac{V_{12}}{V}$.

На том же основании вероятность того, что молекула окажется хотя бы в одном из выделенных объемов (объем V_{12} необходимо вычесть, иначе он будет учтен дважды), равна

$$P(V_1 + V_2) = \frac{V_1 + V_2 - V_{12}}{V} = P(V_1) + P(V_2) - P(V_{12}).$$



Итак, закон сложения вероятностей в общем случае: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, то есть вероятность того, что происходит либо событие A , либо событие B (сумма событий) равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность совместного наступления событий A и B .

Умножение вероятностей независимых событий. Вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B , называется **условной вероятностью** события A и обозначается $P(A/B)$ или $P_B(A)$. Применяя это определение к рисунку предыдущего пункта условная вероятность того, что молекула будет обнаружена в V_{12} , если она уже оказалась в V_2 , равна $P(V_1/V_2) = \frac{V_{12}}{V_2}$. Или, в общем случае, поскольку общее число испытаний, при которых произошло событие B равно N_B , то

$P(A/B) = \frac{N_{AB}}{N_B}$. Умножив и разделив это выражение на N и полагая N большим, получим $P(A/B) = \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N}{N} = \frac{P(AB)}{P(B)}$, где $P(AB)$

– вероятность одновременного наступления и события A , и события B . Отсюда формула умножения вероятностей в общем случае $P(AB) = P(A/B) \cdot P(B)$. Если события A и B независимы, то есть наступление события A не зависит от того, произошло ли событие B , тогда вероятность $P(A/B) = P(A)$.

Итак, формула умножения вероятностей независимых событий имеет вид $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, то есть вероятность одновременного наступления независимых событий A и B равна произведению вероятностей наступления каждого из событий.

Пример: вероятность выигрыша Э. Фандориным осла в болгарском трактире в фильме «Турецкий гамбит» после хода соперника оказалась равной $1/36$.

2. Функция распределения.

Определение функции распределения (плотности вероятности). Термины: плотность вероятности, функция распределения, функция распределения плотности вероятности – это синонимы. Плотность вероятности есть отношение вероятности нахождения частицы в бесконечно малом объеме к этому

объему $f(x, y, z) = \frac{dP}{dV}$, где принято тождественное обозначение

$dP \equiv dP(dV)$. Функция распределения удовлетворяет условию

нормировки $\int_{V \rightarrow \infty} f(x, y, z) dx dy dz = 1$, которое по сути означает

факт существования частицы. Записанный интеграл позволяет вычислить вероятность события обнаружения частицы во всем объеме пространства. Очевидно, что такое событие является **достоверным**, если частица существует.

Функция распределения – самое важное понятие статистической физики. Если в механике при известном $\vec{r}(t)$ можно сказать, что о движении частицы известно все (поэтому нахождение зависимости радиуса-вектора от времени и есть основная задача механики), то в *статистической физике именно функция распределения несет полную информацию об изучаемом объекте*. Никакой более полной информации о поведении статистической системы не существует. (Вспомните, что позволяет найти уравнение Шредингера.)

Пример 1. Частица с одинаковой вероятностью может находиться в любой точке объема V . Тогда по условию нормировки $\int_V f_0 dV = f_0 \int_V dV = f_0 V = 1$. Отсюда получим, что $f_0 = 1/V$.

Пример 2. Частица, находящаяся в БГОППЯ, обнаруживается с различной плотностью вероятности в разных точках объема V . Квадрат модуля волновой функции, являясь функцией распределения, показывает, как распределена вероятность нахождения в интервале dx в разных точках числовой оси.

Функция распределения вероятностей $F(x)$ равна вероятности того, что случайная величина X принимает значения, меньшие некоторого заданного числа x , то есть

$$F(x) = P(x_j < x) = \sum_{x_j < x} P_j, \text{ если распределение дискретно, или}$$

$$dP(x < x_0) = dF(x_0) = f(x)dx \text{ и, очевидно, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx,$$

если распределение непрерывно. Функция распределения вероятности позволяет легко находить вероятность обнаружения частицы в конечном интервале числовой оси $[x_1; x_2]$:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} dF(x) = F(x_2) - F(x_1).$$

Задание: найти функция распределения вероятности, описывающую поведение частицы в БГОПЯ.

3. Среднее значение и дисперсия.

Среднее значение непрерывной функции. По определению, средним значением функции $\varphi(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$ называется такое значение $\langle \varphi(t) \rangle_t$, чтобы площадь прямоугольника со сторонами $\langle \varphi(t) \rangle_t$ и $(t_2 - t_1)$ была равна площади под графиком функции на этом интервале, то есть

$$\langle \varphi(t) \rangle_t \cdot (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt.$$

Откуда среднее значение равно $\langle \varphi(t) \rangle_t = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt.$

(Чтобы понять формулу, вспомните геометрический смысл интеграла.)

Полученная формула хорошо известна из курса «Механики»,

$$\text{если ее переписать в виде: } \langle \bar{v}(t) \rangle = \frac{\bar{s}}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \bar{v}(t) dt.$$

Среднее значение дискретной случайной величины также

известно из физического практикума: $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$

Если измерений дискретной величины сделать много, то значения начнут повторяться. Тогда, группируя повторяющиеся значения,

$$\text{можно записать } \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J x_j N_j = \sum_{j=1}^J x_j \frac{N_j}{N} = \sum_{j=1}^J x_j P(x_j),$$

или, окончательно, $\langle x \rangle = \sum_{j=1}^J x_j P(x_j).$ Заметим, что $\sum_j N_j = N$, а

вероятность удовлетворяет условию нормировки $\sum_j P(x_j) = 1.$

Пример: на предприятии 1000 человек. Пусть заработная плата 2 чел. – 5000 р., 98 чел. – 3000 р., 900 чел. – 2000 р. Тогда средняя заработная плата

$$\langle x \rangle = 5000 \cdot 0,002 + 3000 \cdot 0,098 + 2000 \cdot 0,9 = 2104(p.)$$

Среднее значение непрерывной случайной величины.

Чтобы применить формулу $\langle x \rangle = \sum_{j=1}^J x_j P(x_j),$ полученную в

предыдущем пункте к непрерывной случайной величине, необходимо суммирование заменить интегрированием, а вероятность того, что величина примет одно из дискретных значений, заменить вероятностью того, что значение случайной величины окажется принадлежащим интервалу $[x; x+dx],$ то есть $dP = f(x)dx.$

В результате получим $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины x относительно среднего значения:

$$D = \sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle.$$

Квадратный корень из дисперсии называется *среднеквадратичным (или стандартным) отклонением*: $\sigma = \sqrt{D}$.

Получим иногда более удобную формулу для вычисления дисперсии, проводя обычные математические преобразования и имея в виду, что среднее значение суммы (разности) равно сумме (разности) средних значений:

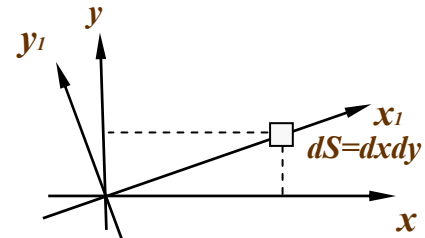
$$\begin{aligned} D = \sigma^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \\ &= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \end{aligned}$$

Итак, дисперсия равна разности между средним значением квадрата и квадратом среднего значения.

4. Распределение Гаусса

Вывод распределения Гаусса. Поместим частицу в начало координат и разрешим ей «шагать» в любую сторону на любое расстояние, но очередной «шаг» не должен зависеть от направления и размера предыдущего. (Такое движение называется *блужданием*.) Последовательность (цепь) сделанных «шагов», удовлетворяющая указанным выше условиям, называется *цепью*

Маркова. Для наглядности заметим, что блуждание частицы похоже на движение хорошо выпившего матроса, вышедшего из прибрежного английского паба. Найдем закон (функцию распределения), по которому будут распределены в пространстве множество частиц, никак не связанных между собой и вышедших из начала координат. (Из симметрии задачи можно предположить, что функция распределения будет зависеть от *квадрата* координат.) Для этого вычислим вероятность, с которой частица окажется в не-



большом квадрате $dS = dx dy$, находящемся в окрестности точки $[x; y]$.

Полагая функцию распределения $\varphi(x^2)$ известной, можно записать $dP_x = \varphi(x^2) dx$. Так как все направления равновероятны, то справедлива и запись $dP_y = \varphi(y^2) dy$. Тогда по *теореме умножения вероятностей независимых событий*

$dP(dS) = \varphi(x^2)\varphi(y^2) dx dy$. Поскольку оси координат выбраны произвольно, то, повернув оси координат так, чтобы ось x' прошла через выбранную ранее точку с учетом теоремы Пифагора можно записать $\varphi(x'^2) = \varphi(x^2 + y^2)$. Тогда вероятность $dP(dS) = \varphi(x'^2) = \varphi(x^2 + y^2) dS$. Приравняем правые части одинаковых вероятностей $\varphi(x^2)\varphi(y^2) = \varphi(x^2 + y^2)$. Итак, нужно найти функцию распределения, удовлетворяющую полученному свойству. Уже сейчас можно догадаться, что такому свойству удовлетворяют показательные (в том числе, экспоненциальные) функции. Прологарифмируем полученное выражение $\ln(\varphi(x^2)\varphi(y^2)) = \ln(\varphi(x^2 + y^2))$ и запишем полные дифференциалы левой и правой части

$\frac{\varphi'(x^2)}{\varphi(x^2)} 2x dx + \frac{\varphi'(y^2)}{\varphi(y^2)} 2y dy = \frac{\varphi'(x^2 + y^2)}{\varphi(x^2 + y^2)} (2x dx + 2y dy)$. Раскрывая

скобки и группируя, получим

$$\left[\frac{\varphi'(x^2)}{\varphi(x^2)} - \frac{\varphi'(x^2 + y^2)}{\varphi(x^2 + y^2)} \right] x dx + \left[\frac{\varphi'(y^2)}{\varphi(y^2)} - \frac{\varphi'(x^2 + y^2)}{\varphi(x^2 + y^2)} \right] y dy = 0.$$

Поскольку переменные x и y независимы, то выражение обращается в нуль, только в том случае, если каждая квадратная скобка

равна нулю. То есть имеем $\frac{\varphi'(x^2)}{\varphi(x^2)} - \frac{\varphi'(x^2 + y^2)}{\varphi(x^2 + y^2)} = 0$

$\frac{\varphi'(y^2)}{\varphi(y^2)} - \frac{\varphi'(x^2 + y^2)}{\varphi(x^2 + y^2)} = 0$. Так как правые слагаемые равны, то

равны и левые, а функции двух независимых переменных могут быть равны только в том случае, если каждая из них постоянна:

$\frac{\varphi'(x^2)}{\varphi(x^2)} = \frac{\varphi'(y^2)}{\varphi(y^2)} = \pm\alpha$. Отсюда, интегрируя одно из равенств, по-

лучим $\varphi(x^2) = A \exp(\pm\alpha x^2)$. Знак

«+» невозможен, так как приводит к бесконечному росту функции на бесконечности. Итак, функция распределения оказалась равной $f(x) = A \exp(-\alpha x^2)$. Это и есть рас-

пределение Гаусса. Если начало движения частиц не находится в начале координат, то функцию можно

«сдвинуть» по известным из начальной алгебры правилам

$f(x) = A \exp(-\alpha(x-\mu)^2)$. График этого распределения приве-

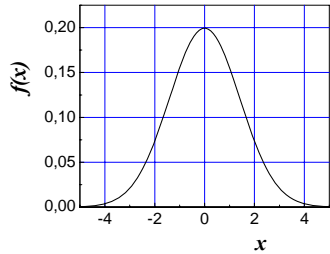
ден на рисунке. Заметим, что в формулу входят три неизвестных пока параметра. Найдем их.

Нормировка распределения Гаусса. Подставив в условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ полученное распределение Гаусса

$f(x) = A \exp(-\alpha(x-\mu)^2)$, проделаем преобразования

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha(x-\mu)^2) dx =$$

{Сделаем замену переменных $\xi = \sqrt{\alpha}(x-\mu)$, $d\xi = \sqrt{\alpha} dx$, тогда}



$$= \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{A\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Здесь учтено, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi}$ (см. приложение: *Гамма-функция*). Выра-

жение для нормировочного множителя получено $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$, но

еще неизвестно α . Итак, распределение Гаусса приняло вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha(x-\mu)^2).$$

Среднее значение распределенной по Гауссу случайной вели-

чины. Подставляя в формулу среднего значения непрерывной

случайной величины $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ распределение Гаусса

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha(x-\mu)^2),$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-\alpha(x-\mu)^2) dx =$$

{к x прибавим μ и вычтем μ , и разобьем интеграл на две части}

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \exp(-\alpha(x-\mu)^2) d(x-\mu)}_{=0 \text{ (нечетная подынтегральная функция в симметричных пределах)}} +$$

$$+ \mu \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha(x-\mu)^2) dx}_{=1 \text{ (по условию нормировки)}} = \mu$$

Итак, получилось $\langle x \rangle = \mu$, то есть μ — среднее значение рас-

пределенной по Гауссу случайной величины. *Среднее значение μ называется также математическим ожиданием или первым моментом распределения.*

Дисперсия называется также *вторым моментом* распределения.

Дисперсия распределенной по Гауссу случайной величины. Так как дисперсия $D = \sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ есть *среднее значение* квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения, то, применяя формулу вычисления *среднего значения* $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ к квадрату отклонения для

распределенной по Гауссу $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha(x - \mu)^2)$ случайной величины, получим:

$$D = \sigma^2 = \langle (x - \mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha(x - \mu)^2) dx =$$

{Вычтем μ под знаком дифференциала и вынесем константу.}

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \exp(-\alpha(x - \mu)^2) d(x - \mu) =$$

{Используя правила интегрирования, внесем под знак дифференциала $(x - \mu)$ и экспоненту.}

$$= \frac{-1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) d \exp(-\alpha(x - \mu)^2) = \text{{интегрируем по частям}}$$

$$= \underbrace{(x - \mu) \exp(-\alpha(x - \mu)^2)}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

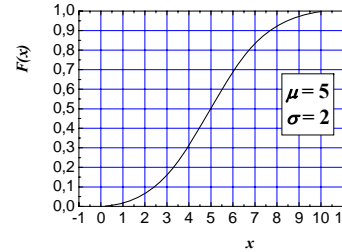
$$- \frac{(-1)}{2\alpha} \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha(x - \mu)^2) d(x - \mu)}_{=1} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Откуда можно выразить $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$.

Итак, распределение Гаусса окончательно принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Функция распределения вероятностей Гаусса. По определению, функция распределения вероятности $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.



Подставляя распределение Гаусса

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right),$$

получим:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dx.$$

Пример распределения Гаусса.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

1. Подбросить и поймать монетку 10 раз.
2. Сосчитать, сколько раз выпал «орел».
3. Заполнить таблицу (Data1: Ni).
4. Вычислить среднее значение величины.
5. Вычислить дисперсию и стандартное отклонение.
6. Вычислить и построить функцию распределения Гаусса, умноженную на число участников эксперимента (Data2: NGauss).
7. Сравнить экспериментально полученное распределение и распределение Гаусса.

Приложения.

Гамма-функция. По определению, гамма-функцией переменной z называется интеграл $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Это понятие может быть полезно при вычислении интегралов, сводящихся к

гамма-функции, так как гамма-функция в ряде случаев может быть вычислена другими способами. Эти способы приводятся ниже. Если $z = n$, то есть аргументом гамма-функции является целое число, то $\Gamma(n+1) = n!$ (факториал), или, что то же самое, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Если z дробное, то справедлива формула

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Поскольку известно, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, то гамма-функция любого полуцелого аргумента легко вычисляется элементарными вычислениями, например

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Заметим также, что элементарными приемами интегрирования интеграл, определяющий гамма-функцию, для $z = \frac{1}{2}$ сводится к интегралу $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Сравните подынтегральную функцию с распределением Гаусса.

Задание 1. Прodelать описанные выше преобразования.

Задание 2. Вычислить $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Задание 3. Вычислив численно интеграл, построить график гамма-функции на интервале $[-5; 5]$. Найти на графике записанные выше значения.

Формулы элементарной комбинаторики. Каким количеством способов можно на n мест поместить n различных предметов? Первый предмет может занять любое из n мест, второму останется для выбора на одно место меньше, и т. д., то есть всего $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_n = n!$ различных способов. (Проверьте это

на трех разноцветных шариках, располагая их в трех ячейках.)

Каким количеством способов можно на n мест поместить m различных предметов ($m < n$)? Сначала размещение не будет

отличаться от предыдущего, но ряд произведений будет короче, то есть $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}_m = \frac{n!}{(n-m)!}$, так как до $n!$ недостает $(n-m)$ сомножителей. При этом число недостающих способов в соответствии с пунктом 1 равно $\underbrace{(n-m) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_{n-m} = (n-m)!$

Каким количеством способов можно на n мест поместить m одинаковых предметов ($m < n$)? Воспользуемся результатом предыдущего пункта, однако, вследствие неразличимости предметов, $m!$ комбинаций будут неразличимы. Следовательно, число возможных способов будет в $m!$ раз меньше, то есть будет равно $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Каким количеством способов можно выбрать из n предметов m предметов ($m < n$)? Оставим подробный разбор этого вопроса математикам и приведем лишь результат. Оказалось, что он в точности совпадает с результатом предыдущего пункта, то есть количество способов равно $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Литература.

Матвеев А. Н. Молекулярная физика, М., Высш. шк., 1987